MA1 – přednáška 14. 10. 2019

Motto: Jak hledat (a někdy i najít) limitu funkce.

Zatím: intuitivně jsme „budovali" pojem limity u elementárních funkcí (známých) – „takové" a povedlo se najít limity i „složené" funkce (z takových) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Dnes se pokusíme (stále ještě intuitivně) dát návod, jak nalézt „limity funkcí", vytvořených z těch funkcí, jejichž limity už známe.

Ve středu si už ukážeme, jak se pak vybuduje „teorie" k řešení problémů s limitami, tj. jak od intuice dojdeme k definicím, větám o limitách a odtud k nalezení limit. funkcí (přesném).

Dnes : Jak vytváříme složitější funkce?

- sčítáním : $f(x) + g(x) = (f+g)(x)$
- násobením : $f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$ (spec. $|f(x)| = f(x)\, \mathrm{sgn}\, x$
- dělením : $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$
- skládáním : $f(g(x)) = (f \circ g)(x)$
- inverzí : $f^{-1}(x) = y \iff x = f(y)$

Ještě pro zjednodušení zápisu (myšlenek a vyjádření)

1) $R^* = R \cup \{-\infty, +\infty\}$

2) okolí bodu $a \in R$: $U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$

(obyčejné okolí bodu a, někdy ε-ové okolí bodu a)

prstencové okolí bodu $a \in R$: $P(a,\varepsilon) = U(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$ $(\varepsilon > 0)$

a $P^+(a,\varepsilon) = (a, a+\varepsilon)$, $P^-(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a)$

okolí bodu $a = +\infty$: $(k, +\infty)$, $k \in R$

okolí bodu $a = -\infty$: $(-\infty, k)$, $k \in R$

1) Existence limity funkce

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existuje $\Rightarrow$ f je definována v $P(a)$
$a \in R^*$
(analog. pro $\lim\limits_{x \to a\pm} f(x)$, je-li $a \in R$)

(ii) f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

2) „Výpočet" limit složitějších" funkcí

(i) je „dobré" umět pravidla pro „skládání" složitějších limit z těch jednodušších

(ii) k nalezení limit složitější funkce, ~~kt~~ jejíž limity „nevidíme" – je třeba odhalit "strukturu vyšetřované" funkce a pak užít „pro výpočet limity pravidla (i)

Věta: Aritmetika limit (pro jednostranné limity analogicky)

označení: $a \in R^*$, f, g jsou definovány v okolí (prstencovém) bodu a,

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = K$, $L, K \in R^*$

Pak (intuitivně na přednášce ve spolupráci s posluchači)
(asi) platí:

a) $\underline{\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))} := K+L$ pro $K,L\in R$

$= \pm\infty$ pro $K\in R$, $L = \pm\infty$

$= +\infty$ pro $K=+\infty$, $L=\infty$

$= -\infty$ pro $K=-\infty$, $L=-\infty$

<u>Problém $K=+\infty$, $L=-\infty$ (tj. „$\infty-\infty$")</u> (neurčitý výraz)

<u>Příklady:</u> $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+e^x) = 1+e$

$\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2+e^x) =$ „$\infty+\infty$" $=\infty$

<u>„$\infty-\infty$":</u> $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x) = +\infty$ (z grafu) ale

$\lim(-x^2+x)$ ($=$ „$-\infty+\infty$") $= -\infty$ (z grafu)

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-(x^2+1)) = 1$!

b) $\underline{\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)} := K.L$, $L,K\in R$

$+\infty$, $L>0$, $K=+\infty$

$-\infty$, $L<0$, $K=+\infty$

$+\infty$ $L=+\infty$, $K=+\infty$ ($\vee$ $L=-\infty$, $K=-\infty$)

$-\infty$ $L=+\infty$, $K=-\infty$

<u>Problém: (neurčitý výraz) $L=0$, $K=\pm\infty$</u>

(tj. „$0.\infty$" $= ?$)

<u>Příklady:</u> $\lim\limits_{x\to 0} x.\sin x = 0.0$ $(=0)$; $\lim\limits_{x\to\infty} x^2.e^x =$ „$\infty.\infty$" $=\infty$

ale $\lim\limits_{x\to\infty} x^2.\frac{3}{x^2}$ „$=\infty.0$" $=3$

a $\lim\limits_{x\to\infty} x^3.\frac{3}{x^2}$ $(=\lim\limits_{x\to\infty} 3x) = \infty$

„$=\infty.0$"

a „obrácené" $\lim\limits_{x\to\infty} x^2.\frac{3}{x^3} =$ „$\infty.0$" $=0$

Speciálně: $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$, pokud $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$,

(zde „asi" $|\infty| = \infty$, $|-\infty| = \infty$)

c) limita podílu $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\left(= \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} \right)$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} : \begin{cases} = \frac{L}{K}, & L, K\in\mathbb{R},\ K\neq 0 \\ = +\infty, & L=+\infty,\ K>0 \\ = -\infty, & L=+\infty,\ K<0 \end{cases}$$

(z (B))

navíc: $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = 0$, pokud $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

! a problém $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)}$ pro $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$?

! (Intuitivně) Věta:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \implies \lim\limits_{x\to a}\frac{1}{|f(x)|} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a $f(x)>0$ (resp. $f(x)<0$) v $P(a)$ $\implies$

$\implies \lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = -\infty$)

(budeme značit „$\frac{1}{0+}$" (resp. „$\frac{1}{0-}$" $= -\infty$)

Jestliže v libovolném okolí $P(a)$ (resp. $P^+(a)$, $P^-(a)$) funkce znaménko mění, pak f limitu v bodě a (resp. limitu zprava, resp. zleva) nemá – zatím (asi ?) intuitivně, později důkaz) –

k bodu 2) – „na tabuli" $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$ $\left(\frac{1}{0+}\right)$ a

$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x} = +\infty$ $\left(\frac{1}{0+}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{1}{x} = -\infty$ $\left(\frac{1}{0-}\right)$

Na „co" nemáme pravidlo?

limity „typu" „$\frac{\infty}{\infty}$" a „$\frac{0}{0}$" (a b) další „$\infty \cdot 0$")

(další neurčité výrazy)

Příklady (limita podílu):

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{(x+3)^2} =$ „$\frac{2}{\infty}$" $= 0$, $\lim\limits_{x\to -3} \frac{1}{(x+3)^2} =$ „$\frac{2}{0+}$" $= +\infty$,

2) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{2}{x+3}$ neexistuje, neboť $\lim\limits_{x\to -3+} \frac{2}{x+3} =$ „$\frac{2}{0+}$" $= +\infty$ ale

$\lim\limits_{x\to -3-} \frac{2}{x+3} =$ „$\frac{2}{0-}$" $= -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x+5}{(x+3)^2} =$ „$\frac{2}{0+}$" $= +\infty$. , $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+5}{(x+3)^2} = \frac{1+5}{(1+3)^2} = \frac{6}{16}$

(spojitost)

$\left(= \frac{3}{8}\right)$

Tedy – v aritmetice limit jsou problémy (neurčité výrazy)

$\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ – „co" s nimi?

- pokusíme se o takovou úpravu dané funkce, která nezmění její limitu a přitom převede „neurčitý" výraz na takový, jehož limitu už lze najít dle uvedených aritmetických pravidel.

Věta. $f(x) = g(x)$ v $P(a)$ a ex. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \Rightarrow$

existuje i $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$

(„opora" pro úpravy při počítání limit)

Příklady – „neurčité výrazy" a jiné

a) podíl („nejjednodušší pro vyřešení"):

$\boxed{„\frac{0}{0}"}$:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x-4} = „\dfrac{0}{0}" \xrightarrow{\text{ne}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{(x-1)}(x+4)} = \dfrac{4}{5}$

(co to znamená?)

(po každé úpravě – „diagnóza")

2) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = „\dfrac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{1}{4}$

3) obecně: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ a>0}} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{x-a}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} =$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ (na příklad obdobně $(\sqrt{x})'_{x=a}$ k výpočtu limit)

a nové pravidlo

4) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = „\dfrac{1}{0+}" = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = „\dfrac{1}{\infty}" = 0$

ale neumíme! $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

$\boxed{„\frac{\infty}{\infty}"}$:

) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x-4} = „\dfrac{+\infty}{+\infty}" = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} =$

$= „\dfrac{1+0-0}{1+0-0}" = 1$

(neboť dle pravidel $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a}{x^2} = 0$, $a \neq 0$

(výrazy „typu" „$\dfrac{a}{\infty}$")

2) $$\underline{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2+1}{2x^2+x+2}} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{x\to\infty} \frac{\overset{x}{x^{\cancel{3}}}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^2}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} =$$

$$= „\frac{\infty}{2}" = \infty$$

3) $$\underline{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{x^3+x+1}} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x^{\cancel{3}}\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} =$$

$$= „\frac{1}{\infty}" = 0$$

b) <u>limita součinu</u> „$0\cdot\infty$" : $\overset{\text{rada}}{\Longrightarrow}$ <u>převést na podíl „$\frac{0}{0}$" v „$\frac{\infty}{\infty}$"</u>

1) $$\underline{\lim_{x\to\infty} (x^2+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}} = „\infty\cdot 0" \underset{\text{na podíl}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{x}+1} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{3/2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = „\frac{\infty}{1}" = \infty$$

2) $$\underline{\lim_{x\to 1} (\sqrt{x}-1)\cdot\frac{1}{x^2-1}} = „0\cdot\infty\,(?)" =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = „\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)\cdot(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

3) $$\underline{\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)} \overset{?}{=} „\infty\cdot(\infty-\infty)" =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\cdot 1}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$

c) limita (součtu) „$\infty - \infty$" $\xrightarrow{\text{„rada"}}$ po součtu (pokud možno) a pak „dolů" dle okolností

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - 2x^2 + 71x) =$ „$\infty - \infty + \infty$" $=$ (vytkneme x^3 – to limitu „řídí")

$$= \lim_{x\to+\infty} x^3\Big(1 - \underbrace{\tfrac{2}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\tfrac{71}{x^2}}_{\to 0}\Big) = \text{„}\infty \cdot 1\text{"} = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}_{\text{„}\infty - \infty\text{"}} = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}} - 1\right) = \text{„}\infty \cdot 0\text{"} -$$

– zde „nefunguje tento úvod – lepe na podíl", tedy

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1} + x} = \text{„}\frac{1}{\infty}\text{"} = 0 \quad \text{(hurá!)}$$

ale $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) = \frac{1}{2}$ (zkuste sami)

ale ještě jednou – neumíme zatím tyto „důležité" limity

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$, a tedy ani

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{(e^x - x)}_{\text{„}\infty - \infty\text{"}} = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) \quad \left(\text{nebo} = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)\right),$$

podobně nelze i $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{(x - \ln(x+1))}_{\text{„}\infty - \infty\text{"}} = \lim\limits_{x\to\infty} x\left(1 - \frac{\ln(x+1)}{x}\right) = ?$

(později)

A dále – limita složené funkce $f(g(x))$ pro $x \to a$
(byl už minule příklad složené limity funkce $e^{\frac{1}{x}}$)
Budeme formulovat pro oboustrannou limitu, samozřejmě pro limity jednostranné.

Věta (VLSF) (o limitě složené funkce)

1) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b \quad (b \in R^*)$

2) $\lim\limits_{y \to b} f(y) = L \quad (L \in R^*)$

3) existuje $P(a)$ tak, že pro $x \in P(a)$ je $g(x) \neq b$
$(\exists P(a)\ \forall x \in P(a): g(x) \neq b)$.

Pak existuje i $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = L \quad \left(= \lim\limits_{y \to b} f(y) = L\right)$

Je-li funkce f spojitá v bodě $b \in R$, pak není předpoklad 3) třeba (proč?), stejně tak, je-li $b = \pm\infty$)
A proč je vůbec předpoklad 3) se uvádí?

Příklady: 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{y \to +\infty} \sqrt{y} = +\infty$, neboť $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+1) = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to ?} \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$: $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ je definována pro $\frac{x+1}{x-2} > 0$,
tj. v $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$,
tedy jsou zajímavé limity pro $x \to \pm\infty$, $x \to -1-$ a $x \to 2+$:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right) \underset{\text{VLSF}}{=} \lim\limits_{y \to 1} \ln(y) = \ln 1 = 0$ (spojitost ln)

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x-2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)} = 1$
„$\frac{\infty}{\infty}$"

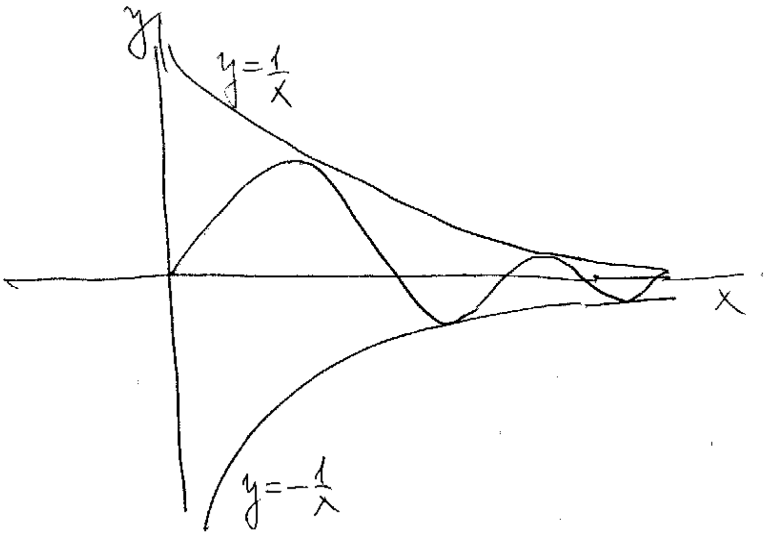
„Poslední" návod pro výpočet limity funkce

(Chytré úpravy pro zkoumanou funkci, až nějaká a další pro „zachránění" limitu nemá)

Příklad: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot \sin x$ = „0 · neexistuje" ?

Představa grafu funkce $f(x)=\frac{1}{x}\cdot\sin x$: $-1\le \sin x\le 1 \ \big|\cdot \frac{1}{x}>0$

$$-\frac{1}{x} \le \frac{1}{x}\sin x\le\frac{1}{x}$$



($\frac{1}{x}$ je „amplituda" sinu)

asi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0$?

A zde (opět intuitivně, později dokážeme)

Věta o limitě sevřené funkce:

(VOP – lidově „věta o dvou policajtech")

Nechť: 1) $g(x)\le f(x)\le h(x)$ v nějakém $P(a)$ $(a\in R^*)$

2) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L \ (\in R)$

Pak existuje i $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

(analogicky pro jednostranné limity pro $a\in R$)

Př. $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}\cdot\cos x)=0$!, neboť 1) $-e^{-x}\le e^{-x}\cos x\le e^{-x}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

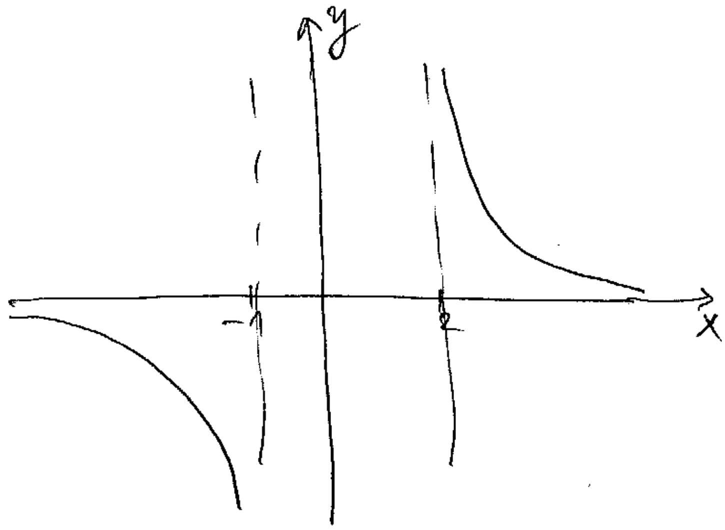
$$\underline{\lim_{x\to 2+} \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)} = \lim_{y\to+\infty} \ln(y) = \underline{+\infty}$$

$$\lim_{x\to 2+} \frac{x+1}{x-2} = „\frac{3}{0+}" = +\infty$$

$$\underline{\lim_{x\to -1-} \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)} = \lim_{y\to 0+} \ln y = \underline{-\infty}$$

$$\lim_{x\to -1-} \frac{x+1}{x-2} = „\frac{0}{-3}" = 0$$

__Pokus o graf__ (f je klesající (složení rostoucí a klesající) v intervalu $(-\infty,-1)$ i v $(2,+\infty)$)



__Zkuste sami__:
$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1-x}{1+x^2}} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(-)}} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = „\frac{\infty}{\infty}" = \underset{(-)}{+}1$$